Лекция 4
Предел функции

Тлеулесова А.М.

1) *Понятие функции.*
2) *Предел функции в точке.*
3) *Свойства функций, имеющих предел в точке.*
4) *Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства.*
5) *«О»- символики. Сравнение функций.*
6) *Понятие обратной функции.*
7) *Монотонные функции.*
8) *Понятие сложной функции.*
9) *1й и 2й замечательные пределы.*

§ Понятие функции.

Пусть X,Y – множества произвольной природы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если $\forall x \in X$ поставлен в соответствие* **единственный** *элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана* ***функция*** *(**отображение**) с множеством значений Y.*

Записывают: $f: X \to Y$, $y = f(x)$

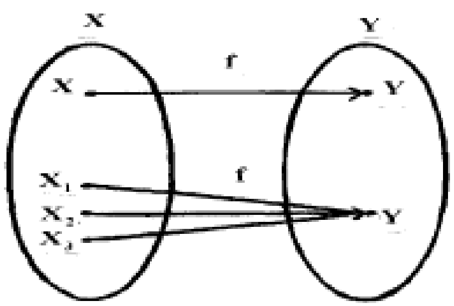
(где f – закон, осуществляющий соответствие)

Называют: X – область (множество) определения функции

x $(x \in X)$ – аргумент (независимая переменная)

Y – область (множество) значений

y $(y \in Y)$ – зависимая переменная (функция)



СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

1) аналитический:

а) явное (т.е. формулой $y = f(x)$)

б) неявное (т.е. с помощью уравнения $F(x,y)=0$).

2) табличный;

3) графический;

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Графиком функции*** $y = f(x)$ *называется геометрическое место точек плоскости с координатами*

$(x; f(x))$.

График функции $y = f(x)$ будем также называть «кривой $y = f(x)$».

4) Словесный способ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть заданы две функции*:

$$f : X \to Y\ ,\ f(x) = y$$

и

$$\varphi : Y \to Z\ ,\ \varphi(y) = z.$$

Функция $\psi : X \to Z\ ,\ \psi(x) = z$ *называется* ***композицией функций*** φ и f *или* ***сложной функцией***.

ОБОЗНАЧАЮТ: $\varphi \circ f$ или φf.

Итак, по определению,

$$\varphi f(x) = z = \varphi(y) = \varphi(f(x))$$

Поэтому сложную функцию называют еще ***функцией от функции***. При этом функцию φ называют ***внешней***, функцию f – ***внутренней***.

Пусть задана функция $f : X \to Y$, $f(x) = y$ и $y_0 \in Y$.
Возможны два случая:

а) существует единственный $x_0 \in X$ такой, что $f(x_0) = y_0$;

б) существуют $x_1, x_2, \ldots \in X$ такие, что $f(x_i) = y_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если* $\forall y_0 \in Y$ *существует единственный* $x_0 \in X$ *такой, что* $f(x_0) = y_0$ *, то функцию* $f(x)$ *называют* ***биекцией*** (или ***взаимно однозначной***).

Если $y = f(x)$ *– биекция, то можно определить функцию*

$$\varphi : Y \to X , \varphi(y_0) = x_0 .$$

Эту функцию называют ***обратной к функции*** f и в общем случае обозначают f^{-1}.

§. Предел функции

1. Определение предела функции по Гейне и по Коши

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, кроме, может быть, самой точки x_0.

$U^*(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ – ***проколотая окрестность точки*** x_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (по Коши, на языке ε-δ).

Число $A \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0*** (пределом функции $f(x)$ в точке x_0), *если* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ *такое, что*

$$\textit{если } x \in U^*(x_0, \delta)\text{ , то } f(x) \in U(A, \varepsilon)\ .$$

Замечание.

1) Условие $x \in U^*(x_0, \delta)$ означает, что для x выполняется неравенство:

а) $0 < | x - x_0 | < \delta$, если $x_0 \in \mathbb{R}$;

б) $| x | > 1/\delta$, если $x_0 = \infty$;

в) $x > 1/\delta$, если $x_0 = +\infty$;

г) $x < -1/\delta$, если $x_0 = -\infty$.

2) Условие $f(x) \in U(A, \varepsilon)$ означает, что для $f(x)$ выполняется неравенство $| f(x) - A | < \varepsilon$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, кроме, может быть, самой точки x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (по Гейне, на языке последовательностей).

Число $A \in \mathbb{R}$ называется ***пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0****, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, стремящейся к x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к A .*

ТЕОРЕМА 1. *Определение предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.*

Обозначают: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \qquad f(x) \to A, \text{ ïðè } \; x \to x_0$

Говорят: «$f(x)$ стремится к A при x стремящемся к x_0» .

2. Свойства пределов

Из свойств сходящихся последовательностей и определения предела функции по Гейне получаем, что справедливы следующие утверждения.

1) Если функция имеет предел при $x \to x_0$, то он единственный.

2) Если $f(x) \to A$, то $|f(x)| \to |A|$.

3) Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 (говорят: ***функция локально ограничена***)

Ограниченность функции

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

Функция $y = f(x)$ *называется* ***ограниченной снизу***, *если* $\exists a \in \mathbb{R}$ *такое, что*

$$a \leq f(x)\ ,\ \forall x \in D(f).$$

Функция $y = f(x)$ *называется* ***ограниченной сверху***, *если* $\exists b \in \mathbb{R}$ *такое, что*

$$f(x) \leq b\ ,\ \forall x \in D(f).$$

Функция, ограниченная сверху и снизу, называется ***ограниченной***.

$\Rightarrow$ Функция ограниченная, если $\exists a, b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$a \leq f(x) \leq b\ ,\ \forall x \in D(f).$$

Функция $y = f(x)$ ограничена $\Leftrightarrow$ $\exists M > 0$ такое, что

$$|\, f(x)\,| \leq M\ ,\ \forall x \in D(f).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $\alpha(x)$ *называется* ***бесконечно малой при*** $\boldsymbol{x \to x_0}$, *если* $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$

4) ЛЕММА 2 (о роли бесконечно малых функций).

Число $A \in \mathbb{R}$ является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ $\Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

5) Пусть $f(x)$ – ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 , $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$. Тогда $f(x) \cdot \alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

6) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел при $x \to x_0$. Тогда их сумма, разность, произведение и частное тоже имеют предел при $x \to x_0$, причем

$$a)\quad \lim_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$b)\quad \lim_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$c)\quad \lim_{x \to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \quad \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0\right)$$

Следствие свойства 6. Если $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то $\forall c \in \mathbb{R}$ функция $c \cdot f(x)$ тоже имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Говорят: «константу можно вынести за знак предела».

7) Пусть $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$ и $\exists\delta>0$ такое, что $f(x) \geq 0$ (или $f(x) > 0$), $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq 0$

8) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы при $x \to x_0$ и $\exists\delta>0$ такое, что $f(x) \geq g(x)$ (или $f(x) > g(x)$), $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

9) ЛЕММА 3 (о двух милиционерах).

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый предел при $x \to x_0$ и $\exists\delta>0$ такое, что $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$, $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда функция $\varphi(x)$ тоже имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Бесконечно большие функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (на языке M-δ, на языке окрестностей).

Функцию $f(x)$ *называют* **бесконечно большой при $x \to x_0$** (в точке x_0), *если* $\forall M>0$ $\exists\delta>0$ *такое, что*

если $x \in U^*(x_0, \delta)$, *то* $|f(x)|>M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (на языке последовательностей).

Функцию $f(x)$ *называют* **бесконечно большой при $x \to x_0$** *, если для любой последовательности* $\{x_n\}$ *значений аргумен-та, стремящейся к* x_0*, соответствующая последова-тельность значений функции* $\{f(x_n)\}$ *стремится к* ∞ .

Замечательные пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Следствия:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha,\quad \alpha\in R$

Таблица эквивалентных функций:

1. $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\quad (\sin x = x + o(x),\quad x \to 0)$
2. $\arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\quad (\arcsin x = x + o(x),\quad x \to 0)$
3. $tgx \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\quad (tgx = x + o(x),\quad x \to 0)$
4. $arctgx \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\quad (arctgx = x + o(x),\quad x \to 0)$
5. $1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ $\quad \left(\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2),\ x \to 0\right)$
6. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x,\ \ln t \underset{t\to 1}{\sim} t-1,\ \ \log_a(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{\ln a}$ $\quad (\ln(1+x) = x + o(x),\quad x \to 0)$
7. $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x,\ \ a^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \ln a$ $\quad (e^x = 1 + x + o(x),\quad x \to 0)$
8. $shx \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\quad (shx = x + o(x),\quad x \to 0)$
9. $thx \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\quad (thx = x + o(x),\quad x \to 0)$
10. $chx - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ $\quad \left(chx = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2),\ x \to 0\right)$
11. $cthx \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4}{3x+5}$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+4\right)}{\lim\limits_{x\to 2}(3x+5)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x\cdot x+\lim\limits_{x\to 2}4}{\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5}=\frac{2\cdot 2+4}{3\cdot 2+5}=\frac{8}{11}$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3-x+5}{x^3+x^2-1}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-x+5}{x^3+x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}2-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}1+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^3}}=2\cdot$$

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{5x}$.

Решение. Находим $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{5x}=(\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x})^{5}=e^{5}$.

Пример 11. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+x)}$.

Решение. Поскольку $\sin 5x \approx 5x$, $\ln(1+x)\approx x$ при $x\to x_0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x} = 5$

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x} = \left(1^{\infty}\right) =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sin^2\frac{1}{x}+2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}+\cos^2\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}\right]^{\frac{x}{2}\sin\frac{2}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{2}\sin\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}} = e^{1} = e\ .$$